Outils pour la physique

Outils mathématiques – TD

Exercice 1 : Nombres complexes

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument des fonctions de transfert suivantes (où A, τ et ω sont des réels positifs) :

1. $\underline{H}(\omega) = -\dfrac{A}{1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega}$;
2. $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\tau\,\omega}$;
3. $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega}{1-\mathrm{j}\,\tau\omega}$;
4. $\underline{H}(\omega) = A\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\tau\,\omega}$.

Exercice 2 : Valeurs moyennes

1. Montrer que $\langle \cos t \rangle = 0$ sur une période.
2. Montrer que $\langle \cos^2 t \rangle = \dfrac{1}{2}$ sur une période.

Exercice 3 : Équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes (en utilisant le formulaire de cours si nécessaire) :

1. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \rho\,g = 0$, avec ρ et g des constantes, sachant que $P(z=0) = P_0$;
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$, sachant que $T(x=0) = T_0$ et $T(x=L) = T_1$;
3. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$, avec τ et E des constantes, sachant que $u(t=0) = 0$;
4. $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x$, avec m et k des constantes, sachant que $x(t=0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = v_0$ où v_0 est une constante ;
5. $\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + 2\,\omega_0\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,i = 0$, avec ω_0 une constante, sachant que $i(t=0) = I_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$ où I_0 est une constante.

Exercice 4 : Dérivées partielles et équation de propagation

Soit le champ électrique $E(x,t) = E_0 \cos(\omega\,t - k\,x)$, avec E_0, ω et k des constantes positives.

1. Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial E}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial E}{\partial t}$.
2. En déduire l'expression de la différentielle $\mathrm{d}E$.
3. Exprimer les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x\,\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial x}$, puis vérifier le théorème de Schwarz.

Le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

avec c une constante.

4. Exprimer la constante c en fonction de ω et k.

Exercice 5 : Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

1. Exprimer les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ définis en coordonnées cylindriques dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
2. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cylindriques.
3. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques.

4. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques.

Exercice 6 : Surface et volume d'une sphère

On considère une sphère de centre O et de rayon R, et on se place en coordonnées sphériques.

1. Montrer que sa surface est $4\,\pi\,R^2$ en intégrant des surfaces infinitésimales $\mathrm{d}S_r$.

2. Montrer que son volume est $\dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3$ en intégrant des volumes infinitésimaux $\mathrm{d}V$.

Exercice 7 : Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q située en O s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r.$$

1. Calculer le flux ϕ du champ $\vec{E}$ à travers la surface d'une sphère de centre O et de rayon R.

2. Calculer la divergence du champ $\vec{E}(r)$, avec $r \neq 0$.

3. Calculer le rotationnel du champ $\vec{E}(r)$, avec $r \neq 0$.